

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН СО ШТАМПАМИ НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕТОДИКИ

Д.Л. Егоров, С.А. Кузнецов

Аннотация

В работе представлена численно-аналитическая методика решения контактных задач теории пластин и оболочек. Проблема решения интегрального уравнения, описывающего условия контакта, сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Формирование и решение этой системы производится с помощью ЭВМ. Методика применена к решению задач контактного взаимодействия пластины и штампа при различных граничных условиях.

Ключевые слова: контактная задача, численное решение, система уравнений, граничные условия, формула Гаусса.

1. Постановка задачи

Решение задач контактного взаимодействия штампов с различными телами является актуальной проблемой механики деформируемого твердого тела. Исследования на эту тему представлены в работах Л.А. Галина [1], Ю.П. Артюхина с соавторами [2–5], обзоре [6] и многих других. Для решения контактных задач существует два основных приема: решение уравнений равновесия внутри области контакта и вне ее с последующим определением контактного давления из условий стыковки; построение интегрального уравнения относительно контактного давления и его решение. Первый прием во многих случаях достаточно сложен. Второй прием может быть осуществлен сравнительно просто, если известна функция влияния. Постановка контактных задач для тонкостенных элементов конструкций на основе теории Кирхгофа – Лява приводит к математически некорректным задачам. Учет сжимаемости нормали к срединной поверхности позволяет получить контактные напряжения, мало отличающиеся от напряжений, вычисляемых по точным уравнениям теории упругости [5]. Согласно этой постановке условия контакта поверхности штампа и пластины записываются [7] в виде интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$k_0\sigma(r, \varphi) + \iint_{\Omega} G(r, \varphi, \xi, \eta)\sigma(\xi, \eta)d\Omega = f(r, \varphi), (r, \varphi), (\xi, \eta) \in \Omega, \quad (1)$$

в котором $\sigma(r, \varphi)$ – неизвестное контактное давление, $k_0 = 13h(1 - \nu^2)/32E$ – коэффициент обжатия, $G(r, \varphi, \xi, \eta)$ – функция влияния, $f(r, \varphi)$ – функция формы и жесткого смещения штампа. Интеграл по области контакта Ω моделирует изгиб срединной поверхности пластины, $k_0\sigma(r, \varphi)$ – перемещения поверхности пластины в результате местного обжатия. Рассмотрены случаи круглого и прямоугольного штампа (рис. 1 и рис. 2 соответственно).

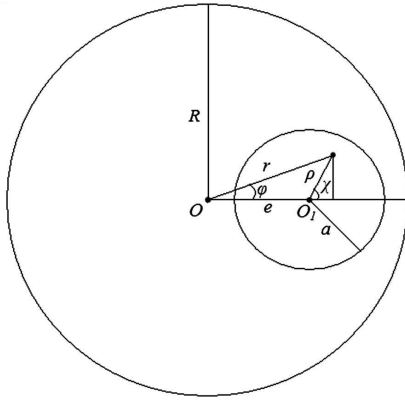


Рис. 1. Постановка задачи для круглого штампа

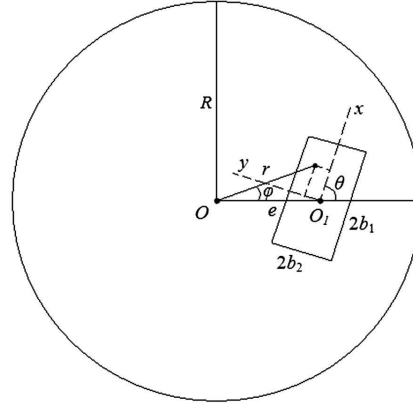


Рис. 2. Постановка задачи для прямоугольного штампа

2. Функция влияния

Функция влияния для пластины, лежащей на упругом основании с одним коэффициентом постели k , является решением уравнения

$$\nabla^4 G(r, \varphi, \xi, \eta) + \lambda^4 G(r, \varphi, \xi, \eta) = \frac{1}{D\xi} \delta(r - \xi, \varphi - \eta), \quad (2)$$

где $\lambda^4 = k/D$, $D = Eh^3/(12(1 - \nu^2))$, $\delta(r - \xi, \varphi - \eta)$ — δ -функция Дирака при соответствующих краевых условиях.

Решение уравнения (2) ищется в виде ряда Фурье

$$G(r, \varphi, \xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} {}'G_n(r, \xi) \cos n(\varphi - \eta). \quad (3)$$

В интервале $(-\pi, \pi)$ δ -функция представима рядом Фурье

$$\delta(\varphi - \eta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} {}'\cos n(\varphi - \eta). \quad (4)$$

Значок \sum' означает, что при $n = 0$ вводится коэффициент $1/2$.

Лемма 1. Частное решение дифференциального уравнения вида

$$(\nabla^4 + \lambda^4)F(r, \varphi) = \Phi(r, \varphi) \quad (5)$$

можно представить в виде

$$F(r, \varphi) = F_1(r, \varphi) + F_2(r, \varphi), \quad (6)$$

где $F_1(r, \varphi)$ и $F_2(r, \varphi)$ являются частными решениями уравнений

$$(\nabla^2 + i\lambda^2)F_1(r, \varphi) = -\frac{1}{2i\lambda^2}\Phi(r, \varphi),$$

$$(\nabla^2 - i\lambda^2)F_2(r, \varphi) = \frac{1}{2i\lambda^2}\Phi(r, \varphi).$$

Лемма доказывается простой подстановкой решения (6) в уравнение (5).
Подставив (3) и (4) в (2), получим уравнение

$$(\nabla_n^4 + \lambda^4)G_n(r, \xi) = \frac{1}{\pi D \xi} \delta(r - \xi), \quad n = 0, 1, \dots \quad (7)$$

С учетом леммы 1 задача построения функции влияния сводится к решению уравнений

$$\frac{d^2 G_{1n}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dG_{1n}}{dr} + \left(i\lambda^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) G_{1n} = -\frac{1}{2i\lambda^2 \pi D \xi} \delta(r - \xi), \quad (8)$$

$$\frac{d^2 G_{2n}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dG_{2n}}{dr} - \left(i\lambda^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) G_{2n} = \frac{1}{2i\lambda^2 \pi D \xi} \delta(r - \xi). \quad (9)$$

Постоянные интегрирования должны быть найдены из условий на контуре пластины $r = R$. Например [8], для свободного края

$$\nabla_n^2 G_n + \frac{\nu - 1}{r} \left(\frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r} \right) G_n = 0, \quad \frac{d\nabla_n^2 G_n}{dr} + \frac{1 - \nu}{r^2} \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) G_n = 0; \quad (10)$$

для заделки

$$G = 0, \quad \frac{dG_n}{dr}; \quad (11)$$

для шарнирного закрепления

$$G = 0, \quad \nabla_n^2 G_n + \frac{\nu - 1}{r} \left(\frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r} \right) G_n = 0, \quad (12)$$

где

$$\nabla_n^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}.$$

Уравнения (8) и (9) являются уравнениями Бесселя. Общие решения соответствующих однородных уравнений известны [8] и выражаются через цилиндрические функции. Условие ограниченности прогиба в центре пластины и особенности поведения цилиндрических функций при $r \rightarrow 0$ позволяют записать общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (7), в виде

$$G_o = C_1 J_n(\sqrt{i}\lambda r) + C_2 I_n(\sqrt{i}\lambda r),$$

где C_1 и C_2 — неизвестные константы.

Частные решения уравнений (8), (9) найдем с помощью интегрального преобразования Ганкеля [9]

$$F(y) = \int_0^\infty f(x) J_n(xy) x dx = H_n[f(x)].$$

С учетом соотношения

$$H_n[\nabla_n^2 f(x)] = -y^2 H_n[f(x)]$$

и фильтрующих свойств δ -функции получим образы функций \tilde{G}_{1n} , \tilde{G}_{2n} в виде

$$\tilde{G}_{1n} = \frac{1}{2\pi i \lambda^2 D} \frac{J_n(\xi y)}{y^2 - i\lambda^2},$$

$$\tilde{G}_{2n} = -\frac{1}{2\pi i \lambda^2 D} \frac{J_n(\xi y)}{y^2 + i\lambda^2}.$$

Обращая преобразование [10], получим оригиналы функций – частные решения

$$\tilde{G}_{1n,2n}(r, \xi) = \pm \frac{1}{2\pi i \lambda^2 D} \begin{cases} I_n(\sqrt{\mp i} \lambda r) K_n(\sqrt{\mp i} \lambda \xi), & 0 \leq r \leq \xi, \\ I_n(\sqrt{\mp i} \lambda \xi) K_n(\sqrt{\mp i} \lambda r), & \xi \leq r. \end{cases}$$

Их сумма дает частное решение уравнения (7)

$$\tilde{G}_n(r, \xi) = \frac{1}{2\lambda^2 D} \begin{cases} v_n(\lambda r) f_n(\lambda \xi) - u_n(\lambda r) g_n(\lambda \xi), & 0 \leq r \leq \xi, \\ v_n(\lambda \xi) f_n(\lambda r) - u_n(\lambda \xi) g_n(\lambda r), & \xi \leq r, \end{cases}$$

где $u_n(r) = \text{ber}_n(r)$, $v_n(r) = -\text{bei}_n(r)$, $f_n(r) = -\text{hei}_n(r)$, $g_n(r) = \text{her}_n(r)$ – функции Кельвина [8]. Таким образом, общее решение уравнения (7) есть

$$G_n(r, \xi) = C_{1n}(\xi) u_n(\lambda r) + C_{2n}(\xi) v_n(\lambda r) + \\ + \frac{1}{2\lambda^2 D} \begin{cases} v_n(\lambda r) f_n(\lambda \xi) - u_n(\lambda r) g_n(\lambda \xi), & 0 \leq r \leq \xi, \\ v_n(\lambda \xi) f_n(\lambda r) - u_n(\lambda \xi) g_n(\lambda r), & \xi \leq r. \end{cases}$$

$C_{1n}(\xi)$ и $C_{2n}(\xi)$ определяются из условий на контуре пластины. Конкретные выражения здесь не приводятся ввиду их громоздкости.

3. Численное решение

Для рассматриваемой задачи контакт предполагается безотрывным. Область контакта покрывается сеткой топологических прямоугольников, в каждом из которых проводится интегрирование с помощью квадратурной формулы Гаусса [11]. Дискретный аналог уравнения (1) имеет для круглого штампа вид

$$k_0 \sigma(r_{spq}, \varphi_{spq}) + \sum_{k=1}^{h_r} \sum_{l=1}^{h_\varphi} (b_{kl} - a_{kl})(d_{kl} - c_{kl}) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n G_{r,\varphi}(\xi_{ikl}, \eta_{jkl}) \xi_{ikl} A_i A_j = \gamma, \quad (13)$$

где

$$G_{r,\varphi} \equiv G(r_{spq}, \varphi_{tpq}, \xi_{ikl}, \eta_{jkl}) = \sum_{m_0=0}^m {}'G_{m_0}(r_{spq}, \xi_{ikl}) \cos m_0(\varphi_{tpq} - \eta_{jkl});$$

для прямоугольного штампа – вид

$$k_0 \sigma(x_{spq}, y_{spq}) + \sum_{k=1}^{h_x} \sum_{l=1}^{h_y} (b_{kl} - a_{kl})(d_{kl} - c_{kl}) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n G_{x,y}(\xi_{ikl}, \eta_{jkl}) A_i A_j = \gamma, \quad (14)$$

где

$$G_{x,y} \equiv G(x_{spq}, y_{tpq}, \xi_{ikl}, \eta_{jkl}) = \sum_{m_0=0}^m {}'G_{m_0}(x_{spq}, \xi_{ikl}) \cos m_0(y_{tpq} - \eta_{jkl}).$$

В приведенных выше формулах приняты обозначения: γ – жесткое смещение штампа, A_i – весовые множители квадратурной формулы Гаусса, h_r , h_φ – шаг разбиения сетки по радиусу и углу соответственно для круглого штампа, h_x , h_y – шаг

разбиения сетки по оси абсцисс и оси ординат соответственно для прямоугольного штампа, n – количество точек в квадратурной формуле Гаусса, m – количество удерживаемых членов ряда (с помощью численных экспериментов было установлено, что достаточно принять $m = 23$).

Проблема определения значений контактного давления в узлах сетки сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Так как функция влияния найдена в системе координат, связанной с пластиной, для упрощения описания области интегрирования осуществляется переход к системе координат, связанной со штампом по формулам

$$r \cos \phi = e + \rho \cos \chi, \quad r \sin \phi = \rho \sin \chi$$

для круглого штампа (рис. 1) и

$$r \cos \phi = e + x \cos \theta - y \sin \theta, \quad r \sin \phi = x \sin \theta + y \cos \theta$$

для прямоугольного штампа (рис. 2).

При численном решении систем уравнений (13) и (14) для ускорения процесса вычислений функции Кельвина заранее вычисляются во всех узлах квадратурной сетки.

Исследовано распределение контактных напряжений в зависимости от относительного размера штампа, эксцентриситета его положения, угла поворота и условий (10)–(12) закрепления пластины.

При проведении расчетов принималось: $h = 0.05$ м, $\gamma = 0.005$ м, $\nu = 0.3$, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $k = 2 \cdot 10^8$ Н/м³. Радиус круглого штампа $a = 0.1$ м. Размеры квадратного штампа: $b_1 = b_2 = 0.1$ м. Размеры прямоугольного штампа: $b_1 = 0.1$ м, $b_2 = 0.05$ м.

На рис. 3–14 представлены поля распределения безразмерных напряжений для нескольких частных случаев. Для круглого штампа безразмерные напряжения вычислялись по формулам:

$$\sigma^*(\rho, \xi) = \frac{\pi a^2 \sigma(\rho, \xi)}{P}, \quad P = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a \sigma(\rho, \xi) \rho d\rho d\xi;$$

для прямоугольного штампа – по формулам

$$\sigma^*(x, y) = \frac{4b_1b_2\sigma(x, y)}{P}, \quad P = \int_{-b_1}^{b_1} \int_{-b_2}^{b_2} \sigma(x, y) dx dy.$$

На рис. 3 наблюдается симметричная во всех направлениях картина. Линии равных напряжений представляют собой концентрические окружности. На краях области контакта напряжения достигают наибольшего значения, а по мере приближения к ее центру их величина уменьшается. На рис. 4 видна похожая картина распределения контактных напряжений для квадратного штампа. Наблюдается симметрия относительно осей координат. Максимальные напряжения возникают в угловых областях штампа.

Рис. 5–14 иллюстрируют влияние условий закрепления пластины на характер распределения контактного давления. При условии свободного края область максимальных напряжений смещена в сторону центра пластины (причем для случаев прямоугольной и квадратной форм штампа наибольшие напряжения возникают в соответствующих угловых зонах). Уровень напряжений уменьшается по мере приближения к краю пластины.

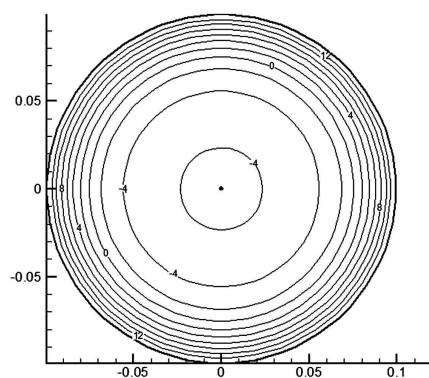


Рис. 3. Круглый штамп, эксцентриситет 0.005 м, края пластины свободны

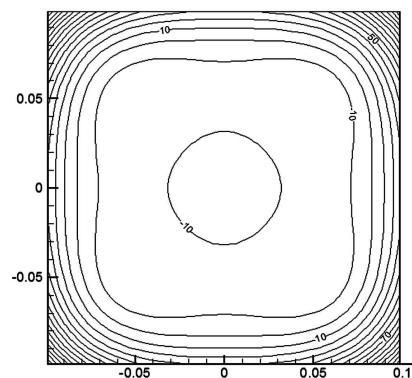


Рис. 4. Квадратный штамп, эксцентриситет 0.005 м, края пластины свободны

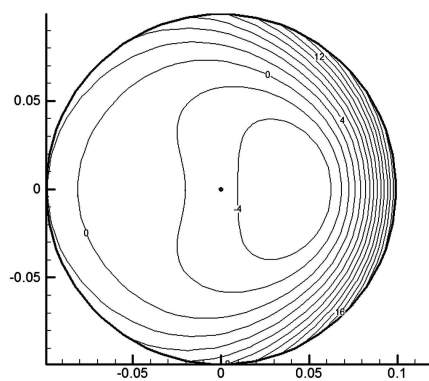


Рис. 5. Круглый штамп, эксцентриситет 0.7 м, края пластины жестко заделаны

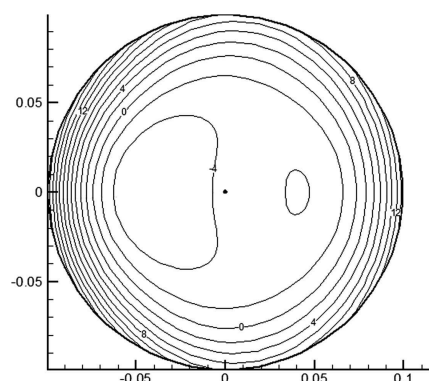


Рис. 6. Круглый штамп, эксцентриситет 0.7 м, края пластины свободны

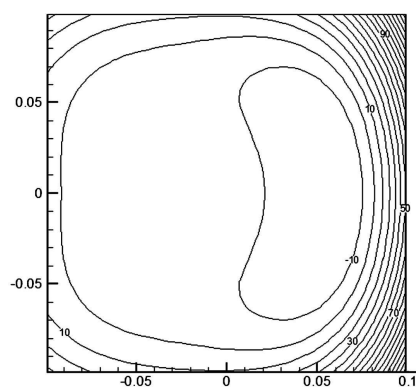


Рис. 7. Квадратный штамп, эксцентриситет 0.7 м, края пластины жестко заделаны

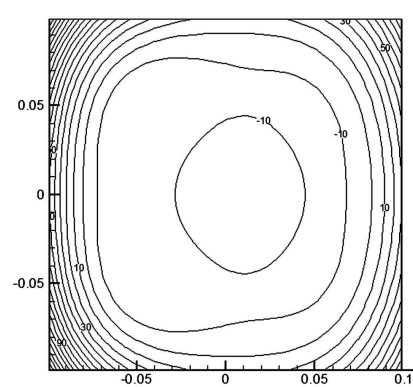


Рис. 8. Квадратный штамп, эксцентриситет 0.7 м, края пластины свободны

В случае жесткой заделки, напротив, максимальные напряжения возникают в областях, близких к краю пластины, а по мере приближения к ее центру уровень напряжений уменьшается.

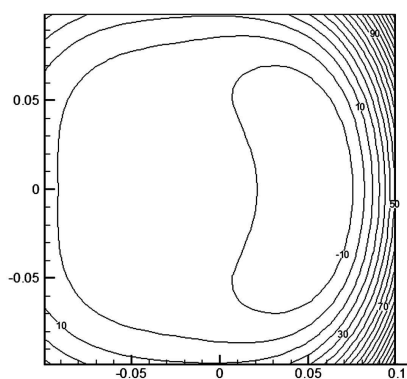


Рис. 9. Квадратный штамп, эксцентриситет 0.7 м, края пластины жестко заделаны

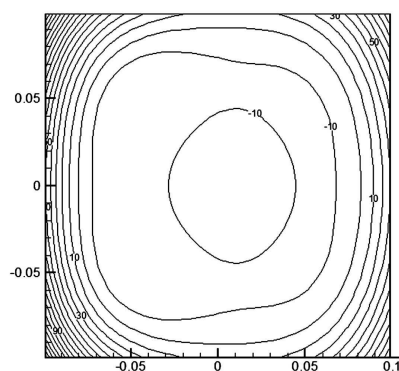


Рис. 10. Квадратный штамп, эксцентриситет 0.7 м, края пластины свободны

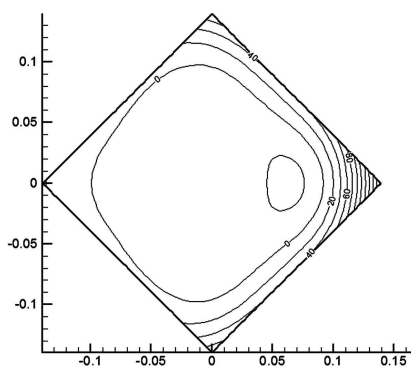


Рис. 11. Квадратный штамп, эксцентриситет 0.7 м, края пластины жестко закреплены. Угол поворота $\pi/4$

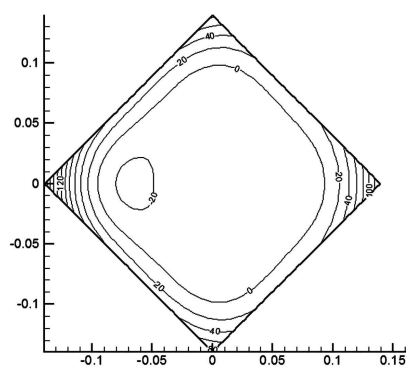


Рис. 12. Квадратный штамп, эксцентриситет 0.7 м, края пластины свободны. Угол поворота $\pi/4$

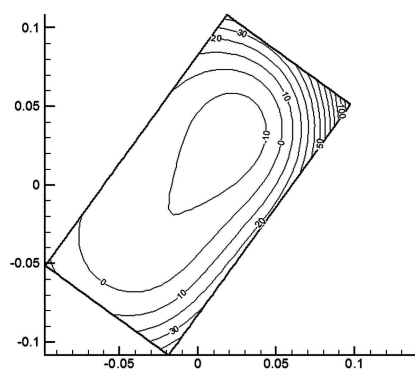


Рис. 13. Прямоугольный штамп, эксцентриситет 0.7 м, края пластины жестко закреплены. Угол поворота $\pi/3$

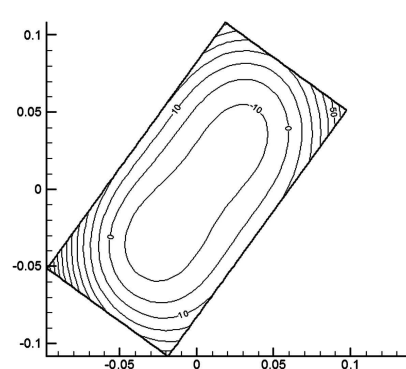


Рис. 14. Прямоугольный штамп, эксцентриситет 0.7 м, края пластины свободны. Угол поворота $\pi/3$

Следует отметить, что жесткая заделка и шарнирное закрепление дают качественно схожий характер распределения контактных напряжений.

Summary

D.L. Egorov, S.A. Kuznetsov. Investigation of Contact Interaction of Round Plates with Stamps Based on Numerical-Analytical Technique.

The paper presents a numerical-analytical technique for solving contact problems in the theory of plates and shells. The solution of an integral equation describing the contact conditions is reduced to the solution of a system of linear algebraic equations. This system is formed and solved by the computer. The technique was applied to the solution of the problems of contact interaction between a plate and a stamp under different boundary conditions.

Key words: contact problem, numerical solution, system of equations, boundary conditions, Gauss formula.

Литература

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1953. – 264 с.
2. Артюхин Ю.П. Одномерные контактные задачи теории оболочек // Изв. РАН. МТТ. – 1981. – № 3 – С. 55–65.
3. Артюхин Ю.П., Малкин С.А. Аналитические и численные методы решения интегральных уравнений в задачах упругого воздействия тел. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2007. – 292 с.
4. Артюхин Ю.П., Карасев С.Н. Действие кольцевых штампов на сферическую оболочку // Тр. XV Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. – Т. 1. – С. 3–8.
5. Карасев С.Н., Артюхин Ю.П. Влияние поперечного сдвига и обжатия на распределение контактных напряжений // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1976. – № 12. – С. 68–76.
6. Галин Л.А. Развитие теории контактных задач в СССР. – М.: Наука, 1976. – 493 с.
7. Кузнецов С. А. Неосесимметричная контактная задача для тонкой пластины, лежащей на упругом основании, при наличии износа // Исследования по теории пластин и оболочек – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984. – № 17, Ч. II. – С. 96–103.
8. Корнев Б. Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. – 458 с.
9. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Наука, 1974. – 544 с.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. – М.: Наука, 1970. – 328 с.
11. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. – М.,Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1950. – 400 с.

Поступила в редакцию
10.03.10

Егоров Даниил Леонидович – аспирант кафедры теоретической механики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: egorov-dl2008@rambler.ru

Кузнецов Сергей Аркадьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, ученый секретарь Научно-исследовательского института математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: skoal@ksu.ru